



BOUW DE WISKUNDEBRUG

Wiskunde in het basisonderwijs, dat telt! Sterke leerlijnen moeten een goede basis leggen waarop leraren secundair onderwijs verder bouwen. Toch verloopt de overgang van het basis- naar het secundair onderwijs niet altijd even vlot. Vaak weten onderwijzers niet goed welke wiskundeleerstof er volgt in het secundair onderwijs en welke nieuwe aanpak, verwoording en meer abstracte denkwijze hierbij horen.

Omgekeerd weten veel leraren secundair onderwijs niet hoe we wiskundige inhoud behandelen in het basisonderwijs. Zo ontstaan er breuken in de leerlijn. Dat brengt leerlingen in de war. Het is belangrijk dat leraren secundair onderwijs gebruik (kunnen) maken van de inzichten die leerlingen in het basisonderwijs meekregen.

In deze Leer-Kracht zoomen Michèle Dexters, Els Van Emelen (wiskundedocenten UCLL-lerarenopleiding), samen met Johan Deprez (KU Leuven) in op twee wiskunde onderwerpen die in beide onderwijsniveaus aan bod komen. Met concrete voorbeelden geven ze aan hoe je in het basisonderwijs de brug naar het secundair onderwijs kan bouwen voor een onderwerp uit het domein meten (herleidingen) en eentje uit het domein meetkunde (eigenschappen van meetkundige figuren).

TEKST
Isabel Rots

ILLUSTRATIES
Rutger Van Parys

Meten en meetkunde: de brug bouwen naar het secundair onderwijs

Mijn dochter, die in het tweede middelbaar zit, worstelde onlangs met een vraagstuk over procenten. Nochtans loste ze dit soort oefeningen al op in de lagere school. Waarom lukte het nu niet meer? Bij het berekenen van de brutoprijs als '1,21 x nettoprijs', bracht de 1,21 haar in de war. Door de nieuwe voorstellingswijze, de meer abstracte denkwijze en de gebruikte wiskundige termen, herkende ze de werkwijze niet. Ze zag de link niet met wat ze eerder leerde in de lagere school.

Dit soort verhalen horen we vaker. Soms zeggen leraren secundair onderwijs zelfs dat leerlingen beter alles vergeten wat ze in de basisschool hebben geleerd. Zonde! Het is net belangrijk om de inspanningen van leraren en leerlingen in de lagere school te benutten. Een duidelijker verband tussen wiskunde uit het basisonderwijs en de meer abstracte wiskunde in het secundair onderwijs, versterkt het inzicht bij de leerlingen. De aansluiting logischer en gemakkelijker maken, is zowel een taak voor leraren secundair onderwijs als voor leraren lager onderwijs.

In dit artikel¹ zoomen we in op de overgang van het basisonderwijs naar het secundair onderwijs. We bekijken in detail hoe je de brug kan bouwen voor een onderwerp uit het domein meten (herleidingen) en eentje uit het domein meetkunde (eigenschappen van meetkundige figuren). Beide onderwerpen zijn prominent aanwezig in zowel het basis- als het secundair onderwijs.

METEN: HERLEIDINGEN

In de basisschool maken kinderen kennis met het wiskundig concept van meten. We leren kinderen dat ze aan een aspect van een object (de lengte van de klas, de oppervlakte van het bord, de inhoud van een flesje water ...) een waarde

kunnen toekennen door te vergelijken met hetzelfde aspect van een ander object. Zo past de inhoud van een klein flesje water welgeteld 3 keer in een grote fles of de lengte van een grote pas 10 keer in de lengte van de klas. Het kleine flesje water en de grote pas noemen we natuurlijke maten of maateenheden.

Wanneer kinderen dit concept tijdens de basisschool verder verkennen, leren ze de **basisinzichten** van het meten².

Als we vragen om de grote fles te vullen met een kleiner flesje dan daarvoor of om kleine passen te zetten in plaats van grote, ontdekken ze een van deze basisinzichten. Ze merken dat ze meer kleinere flesjes en meer kleinere passen nodig hebben.

► **Basisinzicht:** Hoe kleiner de maateenheid, hoe groter het maatgetal en omgekeerd. Gaandeweg ontdekken kinderen dat ze alleen maar meetresultaten kunnen vergelijken wanneer ze die in dezelfde maateenheid uitdrukken. Als Fien zegt dat haar boek evenveel weegt als 5 citroenen terwijl Afsa beweert dat haar boek even zwaar is als 6 mandarijnen, kunnen ze geen uitspraak doen over welk boek het zwaarste is.

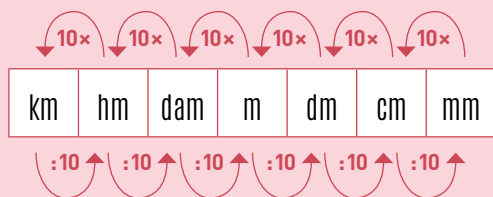
TEKST

Michèle Dexters,
Els Van Emelen,
met medewerking
van Johan Deprez

► **Basisinzicht:** Om meetresultaten te vergelijken, moeten we ze in dezelfde maateenheid uitdrukken.

Natuurlijke maten zijn niet altijd even handig en evenmin eenduidig (jouw pas is niet even groot als de mijne), waardoor we op een bepaald moment overstappen op standaardmaten. Zo voeren we voor het aspect lengte, de meter in. Vanaf dan meten we de lengte van de klas niet meer door te vergelijken met een grote pas, maar wel door te bepalen hoe vaak die afgesproken lengte van 1 meter in de lengte van de klas past. We zeggen dan dat de klas 10 meter lang is.

In een volgende fase leren we kinderen dat we die meter niet in elke situatie kunnen gebruiken. Wanneer we iets willen meten dat korter is dan 1 meter, dan hebben we er niets aan. Evengoed is het een weinig zinvolle opdracht om de afstand van school naar huis te meten met een stok van 1 meter. We zoeken nieuwe maten die een verband hebben met de meter, die zowel groter als kleiner zijn. Die afgeleide maten kiezen we niet zomaar, we maken afspraken volgens een weldoordacht systeem. Voor lengte spreken we af dat opeenvolgende lengtematen³ een verband hebben van 10.



► **Basisinzicht:** De standaardmaateenheden berusten op afspraken en staan in een vaste verhouding tot elkaar. Ze vormen een systeem.

Het omzetten van een meetresultaat, uitgedrukt in een gegeven maateenheid, naar een andere maateenheid, noemen we herleiden. Herleiden is een wiskundig onderwerp waarop leraren in

de lagere school veel oefenen omdat leerlingen hier vaak moeilijkheden mee ondervinden. Daarnaast is het een wiskundig onderwerp dat in het secundair onderwijs terugkomt, maar op een abstracter niveau. Dit is een typisch voorbeeld van een (te) grote kloof.

Niet zomaar komma's verschuiven en nullen bijplaatsen

Het herleiden van metingen in de ene maat naar een resultaat in een andere maat, gebeurt in de meeste basisscholen met behulp van een tabel. Bijvoorbeeld de tabel uit figuur 1 (om oppervlaktematen te herleiden).

1 km x 1 km	100 m x 100 m	10 m x 10 m	1 m x 1 m	1 dm x 1 dm	1 cm x 1 cm	1 mm x 1 mm
1 km ²	10 000 m ²	100 m ²	1 m ²	1 dm ²	1 cm ²	1 mm ²
				0	0	6
					3	4
						0
						0

Figuur 1. Uit: De Wilde, Libbrecht, Mivis, & al., Wiskidz 6de leerjaar, blok 7 p. 9.

Als we dat goed doen, leren leerlingen niet alleen *hoe* zo'n tabel werkt maar ook *waarom* deze werkwijze werkt. We maken dat inzicht voor leerlingen helder door de achterliggende redenering te expliciteren.

We steunen hierbij op twee **basisinzichten** voor meten:

- Als we een meting uitdrukken in een kleinere maat, wordt het maatgetal groter. Maat en maatgetal zijn omgekeerd evenredig. Dat is ook zo voor oppervlakte.
- De verhouding tussen opeenvolgende maten is constant. Voor oppervlakte past een kleinere maat 100 keer in een grotere maat. De verhouding van 100 leren kinderen tijdens een les(senreeks) die aan de lessen over herleidingen voorafgaat. Vanuit de concrete ervaring dat 1 cm² 100 keer in een dm² past en 1 dm² 100 keer in een m², trekken we deze verhouding door naar de kleinere en grotere maten.

1 We richten ons hier op leraren basisonderwijs en de rol die zij kunnen spelen in de overgang naar het secundair onderwijs. Uiteraard hebben we ook suggesties voor leraren secundair onderwijs om het fundament uit de basisschool beter te benutten.

Je vindt ze in ons artikel dat verscheen in het tijdschrift *Uitwisseling*:



2 In dit artikel geven we enkel de inzichten weer die het meest relevant zijn voor het onderdeel 'herleidingen'. Voor een overzicht van alle basisinzichten, mail naar els.vanemelen@ucll.be.

3 Merk op dat we er bewust voor kiezen om de maateenheden hectometer en decameter te gebruiken. Verderop gaan we hier dieper op in.

De redenering om inzichtelijk te herleiden met behulp van een tabel gaat als volgt:

- 1 We nemen het voorbeeld: $567 \text{ dm}^2 = \dots\dots\dots \text{ m}^2$
- 2 We bouwen de tabel voor oppervlaktematen op:

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2
---------------	---------------	----------------	--------------	---------------	---------------

- 3 De verhouding tussen twee opeenvolgende maten bij oppervlakte is 100 (basisinzicht). Dat betekent dat er 100 dm^2 passen in 1 m^2 . We moeten dus 99 dm^2 in de kolom van de vierkante decimeter kunnen schrijven voor we cijfers in de kolom van de vierkante meter invullen. Dat betekent dat er bij elke maat plaats voor 2 cijfers nodig is. Daarom verdelen we elke kolom in twee subkolommen.

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2

- 4 We noteren de meting, 567 dm^2 , in de tabel. We weten dat de maat (dm^2) slaat op het cijfer van de eenheden. De 7 hoort dus op de plaats van de eenheden bij de dm^2 .

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2
			5	6	7

- 5 We willen het oorspronkelijke meetresultaat omzetten naar m^2 . De nieuwe maat is groter dan de oorspronkelijke maat. Het maatgetal zal dus kleiner zijn (basisinzicht). Het nieuwe cijfer van de eenheden wordt dat wat er bij de eenheden van de vierkante meter staat. Dit is de 5. We plaatsen een komma achter deze 5 want de maat moet op het cijfer van de eenheden slaan.
Antwoord: $567 \text{ dm}^2 = 5,67 \text{ m}^2$

De sprong naar abstractie in het secundair onderwijs

In het secundair onderwijs streven we ernaar dat leerlingen herleidingen abstract leren uitvoeren. Dit steunt op dezelfde basisinzichten, al benoemen leraren die meestal niet meer expliciet. We nemen het voorbeeld van hierboven om te illustreren hoe zo'n abstracte herleiding verloopt:

$$567 \text{ dm}^2 = \dots\dots \text{ m}^2$$

$$567 \text{ dm}^2 = 567 \times 1 \text{ dm}^2 \quad \text{met } 1 \text{ dm}^2 = \frac{1}{100} \text{ m}^2 = 0,01 \text{ m}^2$$

$$= 567 \times 0,01 \text{ m}^2$$

$$= 5,67 \text{ m}^2$$

Het zou goed zijn dat leerlingen voor ze aan deze opgave beginnen, nadenken over de basisinzichten. Als ze zich afvragen welke eenheid de grootste is, beseffen ze alvast dat ze een kleiner maatgetal zullen uitkomen. Ze herleiden immers naar een grotere maateenheid (basisinzicht). Wanneer ze het verband tussen beide maateenheden zoeken, kunnen ze verwoorden dat het verband tussen twee opeenvolgende oppervlaktematen 100 is. Als de maat 100 keer groter wordt, dan wordt het maatgetal 100 keer kleiner (basisinzicht). Dat verklaart de $\frac{1}{100}$ en de 0,01.

Hoewel sommige leraren secundair onderwijs hier aandacht aan besteden, zorgt het streven naar abstract denken er al gauw voor dat het benoemen van deze inzichten afneemt. Hoewel we uiteraard pleiten voor inzichtelijk wiskundeonderwijs, vinden we het logisch en nodig dat leerlingen op termijn deze sprong in abstractie zetten, zeker met het oog op oefeningen binnen de fysica, waarbij ze vaak meerdere herleidingen tussen verschillende maten tegelijk uitvoeren.

Mind the gap en bouw de brug

Er is een groot verschil tussen de aanpak met de tabel in de lagere school en de abstracte redene-

ring in het secundair onderwijs. Het vraagt veel van leerlingen om deze overstap te maken. Om alle inspanningen van leraren en leerlingen in de basisschool te laten renderen, zoeken we hoe we de kloof kunnen verkleinen en de brug bouwen.

Leerlingen voldoende vertrouwd maken met het metriek stelsel

Eindtermen en leerplannen hebben de afgelopen decennia een te theoretische insteek in de lagere school proberen te voorkomen. Zo vond men het te verre gaand om leerlingen te toetsen op het begrip en het gebruik van de termen 'maat(eenheid)' en 'maatgetal'. Dat heeft onbedoeld als resultaat gehad dat deze termen helemaal uit de onderwijspraktijk zijn verdwenen. Om je een fundamenteel begrip te kunnen vormen van wat er bij herleidingen aan de hand is, lijkt het ons nochtans van essentieel belang, en uiteindelijk ook gewoonweg eenvoudiger, om een gezamenlijke, wiskundig correcte taal te hanteren. We raden aan om van in het begin van de lagere school tijdens de instructies en onderwijsleergesprekken deze termen consequent te gebruiken en te duiden.

Ook leren leerlingen in de lagere school nog zelden de voorvoegsels 'hecto' en 'deca'. Figuur 1 toont dat de hectometer en de decameter meestal met 100 m en 10 m worden aangeduid. Dat we deze eenheden minder gebruiken in het dagelijks leven, is geen voldoende argument om ze niet te gebruiken in de lagere school. Het metriek stelsel zit zo mooi en logisch in elkaar. Het is zonde om kinderen het verband met de tientaligheid van ons talstelsel en de systematiek van het metriek stelsel te onthouden. We pleiten niet voor een doorgedreven oefening op herleidingen tussen deze eerder zeldzame maateenheden. Maar het is wel zinvol om ook concrete ervaringen met deze maateenheden op te doen en ze met het correcte voorvoegsel te benoemen. Zo zullen de leerlingen verderop in hun schoolcarrière beter kunnen inschatten hoe groot deze maten zijn en of hun berekeningen realistisch zijn.

Gebruik van een inzichtelijk (pijlen)schema in plaats van een algoritme

In werkboeken (zie bijvoorbeeld figuur 2) zien we vaak hoe het herleiden van meetresultaten via de tabel als een techniek wordt aangeleerd. Wanneer leerlingen een stappenplan of 'algoritme' gedachteloos uitvoeren, zet dat het fundamenteel inzicht onder druk. Met allerlei trucjes plaatsen ze nullen bij, verschuiven ze komma's en voeren ze kolommen in. Het aanleren van deze 'regeltjes', legt een hypotheek op het doorgroeien naar het abstract uitvoeren van herleidingen. We maken kinderen met andere woorden afhankelijk van het algoritme. Zo geven we hen geen basis mee om de overstap naar de aanpak in het secundair onderwijs te maken en om later, bv. bij fysica, sneller herleidingen uit te voeren.



Figuur 2. Uit: De Wilde, Libbrecht, Mivis, & al., *Wiskidz 6de leerjaar, blok 7 p. 9.*

We werken een alternatieve aanpak met een pijlenschema uit, waarbij het belangrijk is dat de leraar de achterliggende principes blijft benadrukken. Een voorbeeld:

$$13,25 \text{ m}^2 = \dots\dots\dots \text{ dm}^2$$

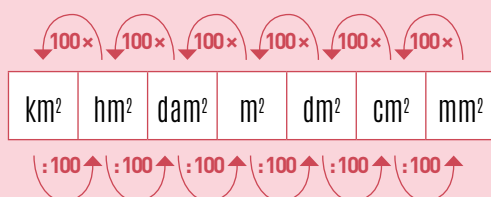
1 Deze herleiding gaat over oppervlaktematen.

De opeenvolgende oppervlaktematen zijn:

km ²	hm ²	dam ²	m ²	dm ²	cm ²	mm ²
-----------------	-----------------	------------------	----------------	-----------------	-----------------	-----------------

2 De maat(eenheid) en het maatgetal zijn omgekeerd evenredig (basisinzicht). Dat betekent: hoe groter de maat waarmee we meten, hoe kleiner het maatgetal en omgekeerd. Een oppervlakte in vierkante decimeter uitdrukken, levert een groter maatgetal op dan in vierkante meter.

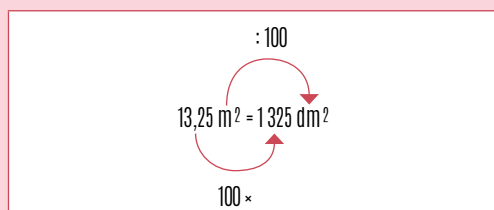
3 We weten dat bij oppervlaktematen *de verhouding tussen opeenvolgende maten een factor 100 is* (basisinzicht). Dat betekent dat $1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$. Of dat er in één vierkante meter honderd vierkante decimeters passen.



4 Een pijlschema helpt om de omzetting te maken.

	maatgetal	maateenheid	
Hoe kleiner de maateenheid, hoe groter het maatgetal (basisinzicht)	100 x	13,25	\downarrow
		...?...	\downarrow
		m^2	\downarrow
		dm^2	\downarrow
			: 100
	$13,25 \text{ m}^2 = 1325 \text{ dm}^2$		
			De verhouding tussen opeenvolgende maateenheden is 100 voor oppervlakte (basisinzicht)

Naarmate leerlingen deze werkwijze vlotter uitvoeren, kunnen ze die verkorten tot deze notatie:



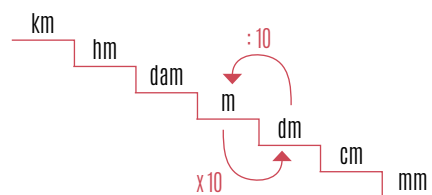
In een latere fase, in de derde graad of in het secundair onderwijs, laten we de pijlen achterwege en redeneren we volledig abstract.

We zijn er van overtuigd dat het aanleren van deze werkwijze, waarbij we een inzichtelijke redenering combineren met het pijlschema, effectiever is dan de methode met de tabel. Het vraagt niet meer moeite of tijd om dit schema

aan te leren. Bovendien lijkt het werken met de tabel op goochelen met een aantal regels, waardoor sommige kinderen fouten blijven maken. Bovenstaande redenering met het pijlschema geeft meer inzicht, waardoor we de verdere door-groei naar een meer abstracte aanpak mogelijk maken. Bij deze aanpak is het nodig dat leerlingen het vermenigvuldigen met en delen door 10, 100 en 1000 onder de knie hebben, ook met kommagetallen. Dat vraagt voldoende oefening binnen de lessen bewerkingen. Of we kunnen de lessen herleidingen gebruiken als oefenkansen of herhaling van deze bewerkingen. Slimme keuzes maken in het jaarplan kan helpen.

Zo doen we het niet!

In sommige werkboeken vinden we een soortgelijk schema om het verband tussen de opeenvolgende maten aan te geven, maar zien we dat de pijlen omgekeerd staan. Het werkboek doelt hier niet op het verband tussen de maateenheden, maar op de bewerking die je met de maatgetallen moet uitvoeren. In de wiskunde heeft een pijl met een bewerking echter een andere betekenis. De bewerking die bij de pijl staat, voer je uit op het getal of de maat die bij het begin van de pijl staat. Het getal of de maat die bij het einde van de pijl staat is het resultaat. Wiskundig staat hier dus dat 'wanneer je een dm in 10 verdeelt, je een meter als oplossing krijgt.' We kunnen kinderen maar beter onmiddellijk de juiste notaties en interpretaties aanleren.



MEETKUNDE: (EIGENSCHAPPEN VAN) MEETKUNDIGE FIGUREN

Doorheen de voorbije curriculumhervormingen heeft meetkunde sterk aan ruimte ingeboet. Verschillende meetkundige onderwerpen hebben plaats moeten ruimen ten voordele van andere wiskundeonderdelen zoals dataverwerking, statistiek en computationeel denken. Daardoor is een goed opgebouwde leerlijn in de leerplannen en handboeken nog moeilijk te vinden. Dat is een gemiste kans want meetkunde is een rijk onderwerp waarmee leerlingen oefenen in het opbouwen van correcte redeneringen. Oefenen met deze manier van denken zou het wiskundig redeneren, waaronder inzichten voor het computationeel denken, zeker ten goede komen.

De meetkunde van het basisonderwijs kunnen we onderbrengen in vier grote delen:

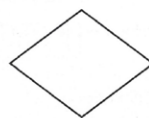
- In de *vormleer* bestuderen we objecten, zowel in het vlak (vierkant, cirkel, rechte ...) als in de ruimte (kubus, bol, prisma ...). We ontdekken eigenschappen van deze objecten (de diagonalen van een ruit staan loodrecht op elkaar, de som van de hoeken van een driehoek is 180°). Deze eigenschappen gebruiken we om figuren onder te brengen in klassen en subklassen (vierhoeken, trapezia, ..., vierkanten).
- Naast het bestuderen van de objecten zelf, vragen we ons af waar deze objecten zich bevinden. Deze *plaatsbepaling* start al in de kleuterklas wanneer kinderen zich in de ruimte leren oriënteren. In een latere fase leren ze hier op een abstractere manier over nadenken met bv. coördinaten of kijklijnen.
- We kunnen deze objecten ook van plaats of van grootte veranderen of vervormen. Dat noemen we *transformaties*. Er zijn zeer eenvoudige transformaties zoals verschuiven of draaien. Complexer zijn spiegelingen, vergrotingen of verkleiningen en projecties (bv. aanzichten).
- Tenslotte zoeken we verbanden tussen het object voor en na de transformatie. Dat levert

eigenschappen op als gelijkvormig, congruent, symmetrisch, loodrecht, evenwijdig ...

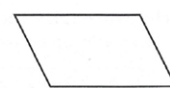
Meer diepgang en samenhang in het basisonderwijs

In het basisonderwijs verkennen en onderzoeken de leerlingen de meest courante meetkundige objecten. Leerlingen lossen oefeningen op door iets te tekenen, aan te kruisen, te meten en in te vullen. Een typische opgave vind je in figuur 3.

5. Teken de diagonalen. Kruis aan. Noteer de meest passende naam.



d



e



f

	d	e	f
2 paar evenwijdige zijden	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4 even lange zijden	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4 rechte hoeken	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
De diagonalen snijden elkaar middendoor.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
De diagonalen zijn even lang.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
De diagonalen staan loodrecht op elkaar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

d is een
 e is een

f is een

6. Vul in. Kies uit: trapezium – parallellogram – ruit – rechthoek – vierkant – zijn even lang – snijden elkaar middendoor – staan loodrecht op elkaar

Bij een en een zijn de diagonalen even lang.
 De diagonalen van de rechthoek en
 Een vierhoek waarbij de diagonalen loodrecht op elkaar staan, is een
 of een

Figuur 3. Uit: De Wilde, Libbrecht, Mivis, & al., Wiskidz, 6de leerjaar, blok 2, les 5.

Op basis van dit soort opgaven doen leerlingen vaststellingen i.v.m. meetkundige figuren en hun eigenschappen. Zo leren ze de figuren kennen. Deze opgaven maken echter de onderliggende wiskundige inzichten niet zichtbaar. Als leraar

moeten we in het onderwijsleergesprek nog heel wat toevoegen om die inzichten mee te geven. Dat is nodig, anders blijft het meetkundeonderwijs oppervlakkig en onsamenhangend. Enkele inzichten die zeker verduidelijking vragen:

- Inzicht in het inclusieprincipe of het concept deelverzameling. Voor meetkundige objecten betekent dit dat je beseft en begrijpt dat bv. een vierkant ook een (bijzondere) rechthoek, ruit, trapezium ... is.
- Inzicht in het concept eigenschap. Een eigenschap van een rechthoek is een uitspraak die voor *elke* rechthoek klopt. Op basis van waarnemingen voor één voorbeeldfiguur kunnen we niet zomaar een eigenschap, zoals 'de diagonalen van een rechthoek snijden elkaar middendoor', afleiden.
- Inzicht in wiskundige formuleringen. De wiskundige verwoording volgt een aantal regels die in het dagelijkse leven anders zijn. Bv. wanneer we spreken over 'de vierhoeken met één paar evenwijdige zijden' (trapezia) omvat dit automatisch ook de vierhoeken met *twee paar* evenwijdige zijden (speciale trapezia als ruit, parallellogram, rechthoek, vierkant). In de spreektaal zouden we daar het woordje 'minstens' aan toevoegen.

Soms zitten er in de opgaven formuleringen die iets zichtbaar maken van deze inzichten. Zo lees je in figuur 3: 'Noteer de *meest* passende naam'. Het woordje 'meest' impliceert dat er meerdere namen passend zijn en dat bv. een ruit ook een parallellogram en een trapezium is. Het is echter niet waarschijnlijk dat leerlingen het belang van dat woordje doorzien zonder dat de leraar hen hierop wijst.

Daarnaast zijn er opdrachten en formuleringen die dit laatste inzicht net in de weg staan. Een voorbeeld hiervan vinden we in de laatste zin van figuur 3 'Een vierhoek waarbij de diagonalen loodrecht op elkaar staan, is *een ruit of een vier-*

kant'. Ten eerste is deze zin wiskundig niet correct. Naast een ruit en een vierkant zijn er nog andere vierhoeken met loodrechte diagonalen zoals een vlieger. Een correcte formulering van deze eigenschap zou zijn: 'Een parallellogram waarbij de diagonalen loodrecht op elkaar staan, is een ruit of een vierkant'. Maar zelfs bij een correcte formulering blijft deze uitspraak leerlingen op het verkeerde spoor zetten. Door de ruit en het vierkant apart te benoemen, wekken we de indruk dat dit twee onderscheiden figuren zijn en dus dat een vierkant geen ruit is. Het zou dus beter zijn om hier enkel 'een ruit' in te vullen.

Een alerte leraar vangt deze lacunes op door goede denkvragen te stellen en aan te dringen op correcte verwoordingen: 'Is dat voor alle rechthoeken zo of alleen voor dit voorbeeld?', 'Kun je een trapezium tekenen waarvan de diagonalen toch gelijk zijn?' en 'Is het dan niet voldoende dat we zeggen dat bij een *ruit* de diagonalen loodrecht op elkaar staan?' ...

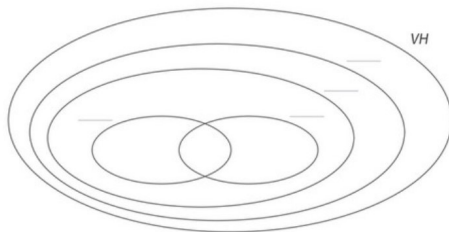
Een sprong in het abstract denken in het secundair onderwijs

De meetkundige objecten die in het secundair onderwijs aan bod komen, zijn in grote mate dezelfde als in de lagere school. Hooguit een aantal specifiekere objecten zoals een prisma, een half-rechte, een bissectrice ... zijn nieuw voor de leerlingen. In handboeken zien we dat het formele aspect meer aandacht krijgt: het formuleren van definities, het correct benoemen van hoekpunten met letters ...

Ook besteedt men meer aandacht aan het inclusieprincipe/deelverzameling. De opgave in figuur 4 maakt met behulp van venndiagrammen duidelijk dat een vierkant ook een ruit of rechthoek is. Ook zien we in figuur 4 (laatste opgave) dat men eigenschappen formeler met 'als ... dan' formuleringen en kwantoren, zoals 'sommige' en 'alle', formuleert.

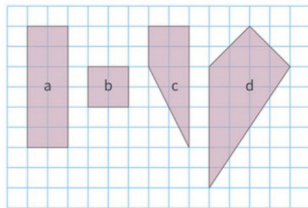
21 In de verzameling van de vierhoeken (VH) zijn de deelverzamelingen van de trapezia (TR), de parallellogrammen (PA), de rechthoeken (RH) en de ruiten (RU) getekend.

1 Schrijf de juiste naam bij elke verzameling.



2 Kleur het gebied in het venndiagram waar de vierkanten zich bevinden.

3 Plaats de elementen a, b, c, en d op de juiste plaats in de verzameling van de vierhoeken.



22 Waar of niet waar? Verklaar.

53 1 $ABCD$ is een vierkant $\Rightarrow ABCD$ is een rechthoek

2 $ABCD$ is een ruit $\Rightarrow ABCD$ is een vierkant

3 Er bestaan parallellogrammen die geen trapezia zijn.

4 Sommige rechthoeken zijn ruiten.

Figuur 4. Uit: Carmeliet, Serneels, & Tytgat, Delta nova 1, H7 p 218.

Mind the gap en bouw de brug

De theorie van Van Hiele is een hulpmiddel dat richting geeft aan het meetkundeonderwijs.

Deze theorie stelt dat meetkunde zich op verschillende denkniveaus kan afspelen.

Niveau	Omschrijving	Uitspraken van leerlingen
1. Visualisatie	Leerlingen herkennen meetkundige figuren ‘op het zicht’ door ze te vergelijken met een prototype. Op dit niveau onderkennen ze eigenschappen van figuren nog niet. Een vierkant dat op zijn punt gezet is, noemen ze vaak hardnekkig een ruit, ook al draai je voor hun ogen een vierkant op een punt.	Deze figuur is een rechthoek omdat ze lijkt op een deur.
2. Analyse	Leerlingen zien figuren als een verzameling van eigenschappen. Ze herkennen en benoemen eigenschappen maar zien geen verband tussen de figuren. Als een leerling een figuur beschrijft, zal hij alle eigenschappen benoemen zonder onderscheid tussen noodzakelijke en niet noodzakelijke eigenschappen. De leerling heeft geen besef van wat ‘voldoende’ eigenschappen zijn om een figuur te beschrijven. Ze zien ook geen verband tussen verschillende figuren.	Een vierkant is geen rechthoek.
3. Abstrahering	Leerlingen zien verbanden tussen eigenschappen en tussen figuren onderling. Ze kunnen betekenisvolle definities geven en informele argumenten formuleren om hun redenering te staven. Ze zien een verband tussen de verschillende klassen van figuren. Ze kunnen figuren hiërarchisch ordenen. Ze zijn in staat eenvoudige ‘als ... dan ...’ redeneringen op te bouwen. De rol en betekenis van een formele deductie begrijpen ze echter nog niet.	Een vierkant heeft alle eigenschappen van een rechthoek en is dus een rechthoek.
4. Ordening	Leerlingen kunnen bewijzen opstellen. Ze begrijpen de rol van ongedefinieerde begrippen, definities, axioma’s en stellingen. Ze zien in dat om de juistheid van een stelling na te gaan, het niet volstaat om zeer veel voorbeelden te controleren, maar dat je door redenering een ‘bewijs’ moet geven. Ze vatten de bedoeling van een strenger en logischer systeem waarin de eigenschappen van de figuren passen. Ze kunnen werken met abstracte uitspraken en trekken besluiten op basis van logische redeneringen en niet op basis van intuïtie.	Ik kan bewijzen dat als de diagonalen van een vierhoek elkaar in het midden snijden, de vierhoek een parallellogram is.
5. Wiskundig systeem	Leerlingen begrijpen de formele aspecten van deductie zoals het opstellen en vergelijken van wiskundige systemen. Ze kunnen indirecte bewijzen en bewijzen door contrapositie hanteren en ze zijn klaar voor niet-euclidische meetkunde.	‘Een vierkant is een rechthoek’ is hetzelfde als ‘een vierhoek die geen rechthoek is, is ook geen vierkant’.

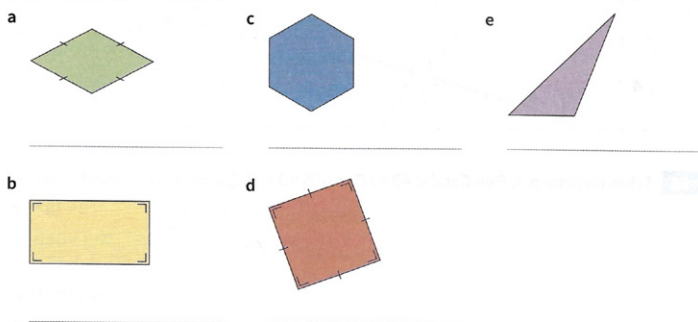
Bron: Thaels, Eggermont, & Janssens, 2001.

In grote lijnen kunnen we zeggen dat kleuters en leerlingen van de eerste graad zich vooral bewegen in niveau 1 en leerlingen in de tweede graad in niveau 2. In de derde graad van het basisonderwijs en de eerste graad van het secundair onderwijs verwerven leerlingen niveau 3. Vaak denkt men dat leerlingen voor een bepaald niveau 'rijp' moeten zijn. Van Hiele kent echter een belangrijke rol toe aan de leraar. De overgang van het ene niveau naar het volgende hangt meer van goed onderwijs af dan van de leeftijd of maturiteit. Zeker de overstap van niveau 2 naar niveau 3 is een belangrijke mijlpaal die een goede basis legt voor de verdere wiskundige ontwikkeling. Hieronder tonen we een aantal voorbeelden van hoe we leerlingen kunnen helpen bij de overgang naar niveau 3. We zoomen in op 'betekenisvolle definities', redenering met 'informele argumenten', 'classificatie van meetkundige objecten' en 'als ... dan ... redeneringen'.

1 Betekenisvolle definities leren formuleren

In het huidige onderwijs gebeurt de overgang van niveau 2 naar niveau 3 vaak impliciet en zonder er veel woorden aan vuil te maken. Leerlingen en leraren zijn zich er niet altijd van bewust dat ze op een nieuw niveau redeneren. Ook handboeken besteden hier weinig aandacht aan. De formulering van de opgaven werkt deze abstrahering niet altijd in de hand.

62 1 Welke vlakke figuren herken je?



Figuur 5. Uit: Carmeliet, Serneels, & Tytgat, 2020, Delta Nova 1, H2, p 113.

Zo past de opgave in figuur 5 beter bij niveau 1 waar leerlingen figuren 'herkennen' dan bij het niveau 3 'abstrahering'. Wanneer er veel van dit soort opgaven aanwezig zijn, leidt dit de leerlingen weg van niveau 3.

De opgave in figuur 6 toont hoe vraagstelling de groei naar een volgend niveau in de weg kan staan.

4: Wat zijn de verschillen tussen een trapezium en een parallellogram?

.....

.....

.....

Figuur 6. Uit: De Wilde, Libbrecht, Mivis, & al., Wiskidz 6de leerjaar, blok 2 les 5

Door te vragen naar de *verschillen* tussen een trapezium en een parallellogram, wekken we de indruk dat dit twee onderscheiden begrippen zijn die naast elkaar bestaan. Terwijl het parallellogram een speciaal trapezium is waardoor het alle eigenschappen van het trapezium automatisch bezit.

Hoe bouwen we de brug?

Als leraar – zowel in het basis- als in het secundair onderwijs – ondersteunen we leerlingen door hun ervaringen te structureren zodat ze gemakkelijker de stap naar het volgende niveau kunnen zetten. Daarbij is het belangrijk dat we beseffen dat elk niveau zijn eigen taal heeft. Typisch voor niveau 3 is het gebruik van definities om een begrip eenduidig vast te leggen. Om te vermijden dat leerlingen 'definities zomaar van buiten blokken en aframmelen' is het zinvol om het *concept* definitie te verduidelijken. In de volgende lesactiviteit geven we een voorbeeld hoe we daaraan kunnen werken.

Lesactiviteit

Definities

Meetkundige objecten benoemen we met een (verzamel) naam zoals vierkant, kubus, trapezium ... We leggen deze begrippen vast met een omschrijving zodat we ze niet met andere begrippen kunnen verwarren. We noemen dit een definitie. Bijvoorbeeld:

Een parallelogram is een vierhoek met twee paar evenwijdige zijden.

Een definitie is sober en bevat het minimum aan eigenschappen of kenmerken om het begrip vast te leggen. De onderstaande omschrijving voor een parallelogram gebruiken we niet als definitie. Ze bevat meer informatie dan nodig om het begrip van andere begrippen te onderscheiden.

Een parallelogram is een vierhoek met twee paar evenwijdige zijden die even lang zijn, waarvan de overstaande hoeken gelijk zijn, met diagonalen die elkaar middendoor snijden.

Soms zijn er meerdere varianten van een definitie mogelijk. Bijvoorbeeld:

- Een vierkant is een vierhoek met vier gelijke zijden en vier gelijke hoeken.
- Een vierkant is een rechthoek met vier gelijke zijden.
- Een vierkant is een ruit met vier gelijke hoeken.

Sommige begrippen, zoals een punt, een rechte, een vlakke figuur ... kunnen we (nog) niet definiëren, maar gebruiken we vanuit intuïtief inzicht.

Om definities te maken is het handig dat we een algemener begrip gebruiken. In de bovenstaande definities onderstreepten we dat begrip: een vierhoek, rechthoek, ruit. Het volgende voorbeeld maakt duidelijk waarom een algemener begrip nodig is:

Een diagonaal verbindt twee niet opeenvolgende hoekpunten.

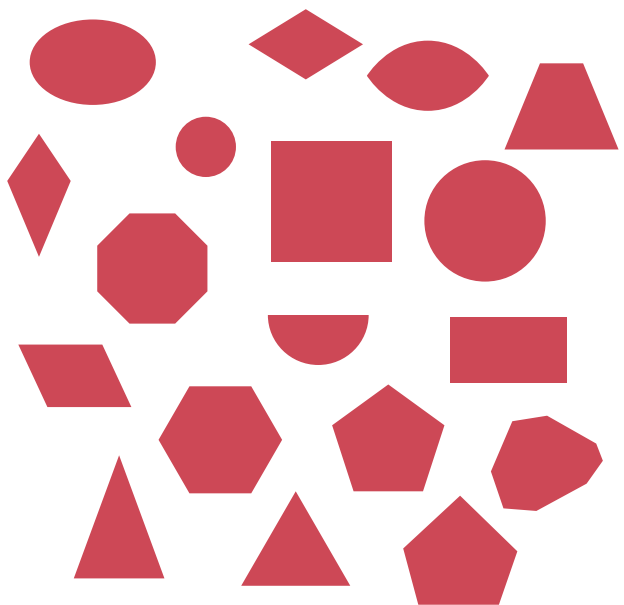
Deze omschrijving bevat geen algemener begrip. Daarom sluit ze onderstaande kromme als diagonaal niet uit:



De omschrijving met een algemener begrip doet dat wel: 'Een diagonaal is een lijnstuk dat twee niet opeenvolgende hoekpunten verbindt.'

Opdrachten

- 1 Waarom zijn volgende zinnen geen goede definities? Pas de zinnen zo aan dat het goede definities worden.
 - In een gelijkzijdige driehoek zijn alle zijden gelijk. *(Antwoord: Het bovenliggend begrip ontbreekt.)*
 - Een vierkant is een vierhoek met 4 gelijke zijden. *(Deze uitspraak is onvolledig.)*
 - Een ruit is een vierhoek met vier gelijke zijden en vier gelijke hoeken waarvan de overstaande hoeken gelijk zijn. *(Deze uitspraak bevat foute informatie, een ruit hoeft geen vier gelijke hoeken te hebben. Bovendien is het niet nodig om iets over de hoeken te zeggen om een ruit te definiëren.)*
- 2 Formuleer de definitie van een parallelogram, een regelmatige veelhoek en een cirkel. Onderzoek telkens welke van de onderstaande figuren voldoen aan deze definitie en welke niet⁴. Verklaar telkens waarom.



⁴ Voor een uitgebreidere set van figuren kan je mailen naar els.vanemelen@ucll.be

2 Redeneringen staven met informele argumenten

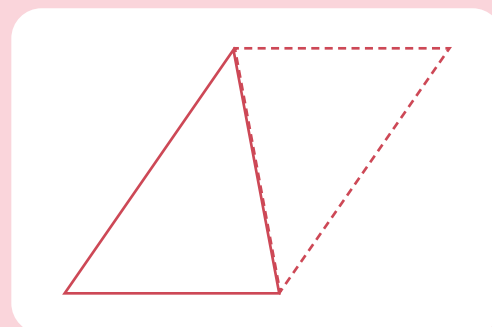
Wanneer we redeneringen met meetkundige figuren opbouwen, gebruiken we vaak een prototype als denkmodel. Een prototype is een voorbeeld van de figuur in zijn meest willekeurige vorm. Zo gebruiken we voor een redenering met driehoeken, geen rechthoekige driehoek maar werken we met een willekeurige driehoek zonder speciale eigenschappen. We willen immers een redenering die algemeen geldig is zodat ze voor alle driehoeken klopt. Leerlingen zijn zich vaak niet bewust van dat uitgangspunt. Bovendien werken opgaven in handboeken dit beseft soms tegen. Figuur 7 illustreert dit voor de formule voor de oppervlakte van een driehoek.



Figuur 7. Uit: De Wilde, Libbrecht, Mivis, & al., *Wiskidz*, 5de leerjaar, blok 9, p. 12.

De auteurs redeneren op een rechthoekige driehoek. Door dezelfde driehoek er omgekeerd tegen te tekenen, structureren ze de driehoek om naar een rechthoek. Zo leiden ze een formule voor de oppervlakte van een driehoek af. De meeste driehoeken hebben echter geen rechte hoek terwijl deze net essentieel is in deze redenering. Vanuit wiskunde is het daarom een relevante vraag of deze formule klopt voor de andere soorten driehoeken.

Wanneer we vertrekken van een willekeurige driehoek levert dit wel een valide redenering op. Wanneer we bij een willekeurige driehoek de tweede driehoek erbij tekenen, krijgen we een parallellogram.



De oppervlakte van de driehoek is de helft van de oppervlakte van het parallellogram:

$$\text{oppervlakte driehoek} = \frac{\text{basis} \times \text{hoogte}}{2}$$

Deze redenering klopt ook voor een rechthoekige driehoek want een rechthoek is een (speciaal) parallellogram. Bovendien krijgen de basis en de hoogte hiermee ineens een correcte invulling.

Hoe bouwen we de brug?

In de eerste plaats is het belangrijk dat leerlingen begrijpen dat we op basis van één voorbeeld een redenering niet kunnen veralgemenen. In principe zijn we er maar zeker van dat een redenering klopt, als we ze gecontroleerd hebben voor *alle* elementen van de verzameling (of als we ze bewezen hebben, cf. niveau 4). We kunnen echter niet alle elementen effectief controleren. Daarom gebruiken we op niveau 3 (zie tabel op L-9) meer informele strategieën. Bijvoorbeeld: we checken de uitspraak voor verschillende types voorbeelden of redeneren op een algemeen prototype. Deze manier van werken helpt om het concept van bewijzen van niveau 4 voor te bereiden. De volgende lesactiviteit illustreert hoe we dit voor de formule van de oppervlakte van een driehoek kunnen aanpakken.

Lesactiviteit

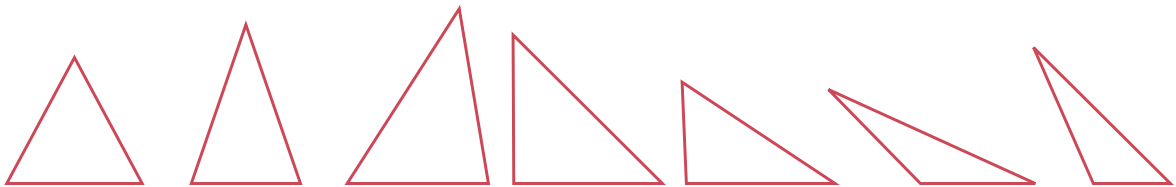
De oppervlakte van een driehoek

Driehoeken kunnen we indelen volgens de hoeken (stomp-, recht- en scherphoekig) of volgens de zijden (gelijkzijdig, gelijkbenig en ongelijkbenig). Wanneer we beide criteria combineren, levert dat maximaal 9 verschillende combinaties op.

- 1 Teken voor elke combinatie een driehoek.

We ontdekken dat er geen 9, maar slechts 7 verschillende soorten driehoeken zijn.

Een gelijkzijdige driehoek is altijd scherphoekig.

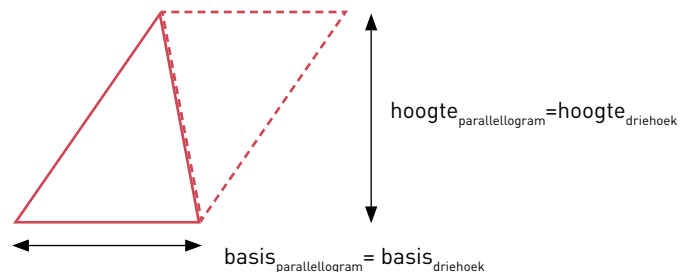


- 2 We zoeken een formule voor de oppervlakte van een driehoek. Structureer daarvoor de onderstaande driehoek om tot een figuur waarvoor we al een oppervlakteformule kennen. Bepaal zo de oppervlakteformule voor een ongelijkzijdige scherphoekige driehoek.



Wanneer we dezelfde driehoek over 180° draaien en tegen de eerste plakken, krijgen we een parallellogram.

De oppervlakte van dat parallellogram is het dubbel van die van de oorspronkelijke driehoek.



Leerlingen hebben de hoogte van de driehoek leren kennen als de afstand van de top tot de overstaande zijde, die we de basis noemen.

$$\begin{aligned} \text{oppervlakte}_{\text{driehoek}} &= \frac{\text{oppervlakte}_{\text{parallellogram}}}{2} \\ &= \frac{\text{basis}_{\text{parallellogram}} \times \text{hoogte}_{\text{parallellogram}}}{2} \\ &= \frac{\text{basis}_{\text{driehoek}} \times \text{hoogte}_{\text{driehoek}}}{2} \end{aligned}$$

3 We willen deze formule veralgemenen voor alle driehoeken. Controleer of deze redenering geldig is voor de andere driehoeken die we tekenden.

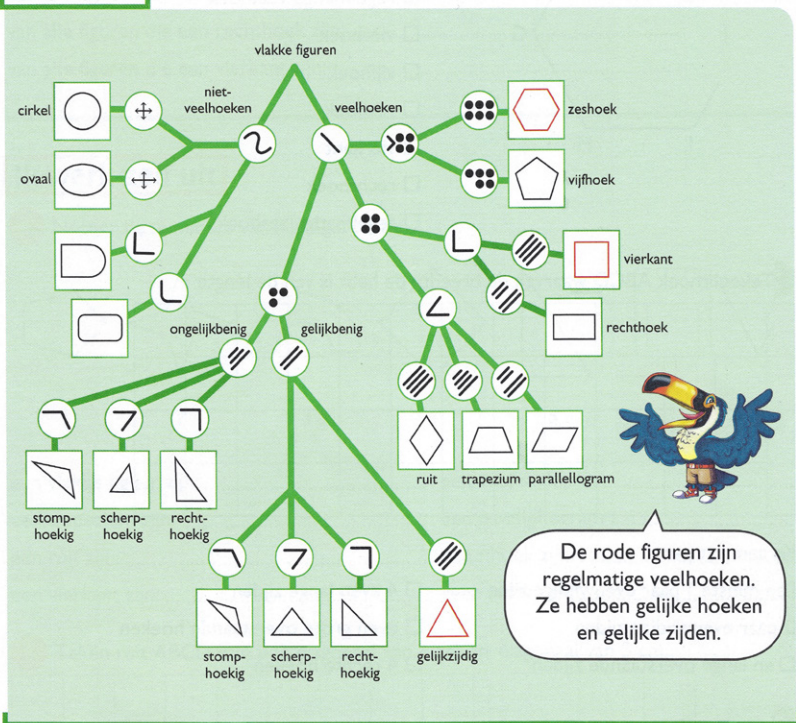
We kunnen elke driehoek – op dezelfde manier als voor de driehoek uit opgave 2 – omstructureren naar een parallellogram. Voor de rechthoekige driehoeken levert dit een rechthoek op, wat ook een parallellogram is. Voor een gelijkbenige rechthoekige driehoek krijgen we zelfs een vierkant. Zo veralgemenen we de redenering.

4 Als we een andere zijde als basis nemen, kunnen we dan nog steeds deze redenering gebruiken? Controleer voor enkele driehoeken.

We kunnen de driehoek steeds omvormen naar een parallellogram, met bijbehorende basis en hoogte. Het is zinvol om de verschillende hoogtes en basissen te laten aanduiden. Leerlingen hebben het soms moeilijk om hoogtes loodrecht aan te duiden. Basis en hoogte liggen immers schuin en niet meer horizontaal of verticaal. Stomphoekige en rechthoekige driehoeken verdienen hierbij zeker bijzondere aandacht omdat basis en hoogte dan respectievelijk buiten de driehoek liggen of samenvallen met de zijden.

Nu we dit gecontroleerd hebben bij veel verschillende soorten driehoeken kunnen we besluiten dat de formule voor de oppervlakte van een driehoek algemeen geldig is.

Ik ontdek



Figuur 8. Uit: De Wilde, Libbrecht, Mivis, & al., *Wiskidz*, 6de leerjaar, blok 4, les 5.

3 Classificatie van meetkundige objecten

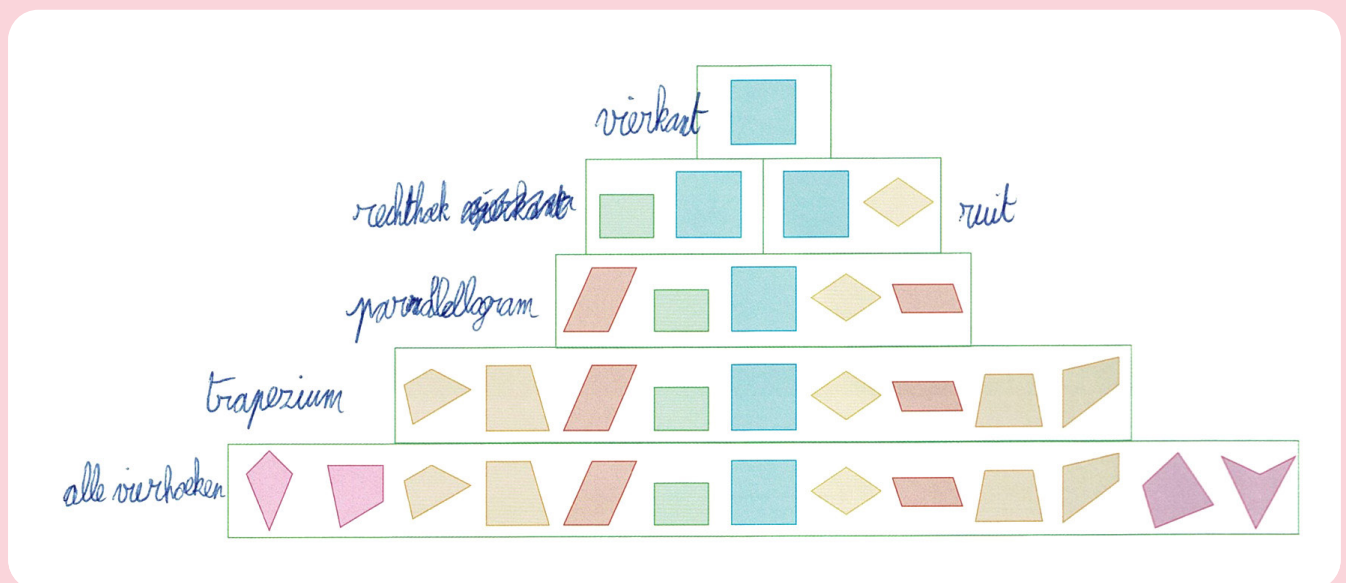
Sinds de invoering van de eindtermen in 1997, kregen de verzamelingenleer en de logica in het basisonderwijs een ander statuut:

‘Het inventief en inzichtelijk werk van kinderen kan niet starten vanuit een opgelegd abstract raamwerk, toch niet in eerste instantie. Vandaar dat het begrippenarsenaal uit de verzamelingenleer niet meer als doel op zich in de eindtermen voorkomt, al kunnen sommige voorstellingswijzen (venndiagrammen, relatiepijlen, ...) interessante hulpmiddelen blijven voor het wiskundig denken van kinderen.’ (AHOVOKS, sd).

Deze, overigens waardevolle, nuancering heeft ertoe geleid dat het gebruik van verzamelingen als voorstellingswijze vrijwel geheel uit het basisonderwijs is verbannen. Handboekmakers zoeken naar andere middelen om verbanden tussen de verschillende meetkundige objecten duidelijk te maken. Een voorbeeld van zo’n schema vind je in figuur 8.

Deze figuur bundelt erg veel informatie en is daardoor heel complex. De auteurs hebben voor een boomdiagram als voorstellingswijze gekozen. Een boomdiagram is een handige voorstelling als de verschillende takken van de boom gescheiden categorieën bevatten. Voor het classificeren van vlakke figuren is dit niet zo: bv. een vierkant is ook een rechthoek en een ruit ... In figuur 8 staat het vierkant in een andere tak dan de rechthoek en lijkt er zelfs helemaal geen verband met de tak van de ruiten. Dit zet leerlingen op het verkeerde been voor de begripsinvulling van deze figuren.

Het gebruik van venndiagrammen zou de verbanden tussen de figuren beter illustreren. Dat zou misschien tegemoet komen aan de verwarring van de leerling die we zien in figuur 9. Ze worstelt nog met de betekenis van het begrip rechthoek. Daarom schrijft ze naast de 'rechthoeken', eerst het begrip 'vierkant' en streept dit later opnieuw door wanneer ze beseft dat een vierkant ook een rechthoek is.



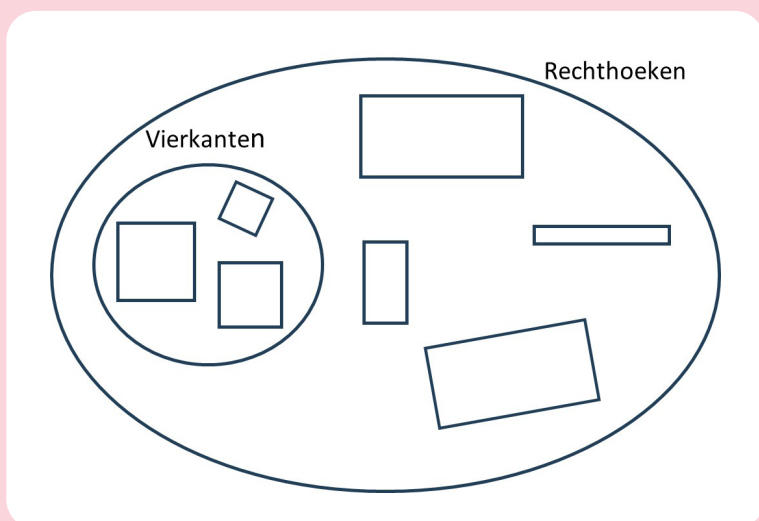
Figuur 9. Uit: Carreyn, Geurickx, & Van Nieuwenhuyze, 2022, Nando 1, H13, p. 10.

Hoe bouwen we de brug?

In het secundair onderwijs maakt de verzamelingenleer wel deel uit van de leerstof. Handboeken behandelen dit onderdeel zelfs als een apart hoofdstuk. Deze isolatie leidt soms tot artificiële contexten die weinig functioneel zijn.

Als we in het basisonderwijs verzamelingen/venndiagrammen bij meetkundige inzichten functioneel gebruiken, levert dit een win-win situatie op. Figuur 10 toont hoe verzamelingen enerzijds een krachtig hulpmiddel zijn om voor meet-

kundige begrippen tot een goede begripsinvolving te komen. Anderzijds is meetkunde concreet genoeg om het abstractere denken van de verzamelingenleer te concretiseren.



Figuur 10. Classificatie rechthoeken

Dit soort voorstellingen helpt leerlingen om een beter begrip van de verschillende meetkundige objecten te ontwikkelen. Daarnaast is het een middel dat leerlingen ondersteunt bij het beoordelen van uitspraken met logische operatoren. Hen laten oefenen op het tekenen (geodriehoek en passer) van verschillende soorten voorbeel-

den scherpt het denken aan. Bv. met de (lege) figuur 10 kunnen leerlingen uitspraken als 'als een rechthoek gelijke diagonalen heeft, is het een vierkant' gericht aanpakken.

ZO DOEN WE DAT!

Beide voorbeelden van meten en meetkunde illustreren dat wij als leraar de stap van het basisonderwijs naar het secundair onderwijs kunnen voorbereiden en vergemakkelijken. Dat is natuurlijk ook zo voor de andere domeinen van wiskunde. Daarvoor is het nodig dat we genoeg zicht hebben op welke leerstof er nog volgt en dat we kritisch en flexibel durven omgaan met aanwezige materialen en leermiddelen. Zo kunnen we de inzichten die we in dit artikel uitwerken, toevoegen daar waar de werkboeken ze niet expliciteren of zelfs tegenwerken.

Michèle Dexters en Els Van Emelen zijn wiskundedocenten UCLL-lerarenopleiding kleuter- en lager onderwijs Limburg, verbonden aan het expertisecentrum 'Art of Teaching' UCLL. Johan Deprez heeft 30 jaar ervaring als vakdidacticus wiskunde aan UAntwerpen en KU Leuven en is sinds dit academiejaar emeritus hoofddocent (met opdracht).

Bronnen

- AHOVOKS. [sd]. Onderwijsdoelen - Uitgangspunten. Opgeroepen op maart 10, 2024, van <https://www.onderwijsdoelen.be/uitgangspunten/4680>
- Carmeliet, C. D., Serneels, K., & Tytgat, P. (2020). Delta nova 1a & b. Antwerpen: Plantyn.
- Carreyn, B., Geurickx, F., & Van Nieuwenhuyze, R. (2022). Nando 1. Brugge: die Keure.
- De Wilde, C., Libbrecht, S., Mivis, K., & al., e. [sd]. Wiskidz. Averbode: Uitgeverij Averbode.
- Thaels, K., Eggermont, H., & Janssens, D. (2001). Van ruimtelijk inzicht naar ruimtemeetkunde. Deurne: Wolters Plantyn.