Een praktijkonderzoek vanuit wiskunde

De kracht van een leerboog

Een leerboog opzetten, een zin die sinds kort onze lessen kruidt. Wij, vier docenten uit de UCLL-lerarenopleiding, zochten of die kon helpen om wiskundelessen beter te maken. We verdiepten ons in breuken, leerstof waarmee leerlingen én studenten worstelen. Ideaal materiaal voor een praktijkonderzoek. Carine Laeremans van top@punt in Geel en Tinne Rutten van de Twinkelaar in Elen deelden met veel plezier hun klas. Zo werden wij even juf in het zesde leerjaar.

LEREN IS WORSTELEN

Het uitgangspunt van ons onderzoek is dat *iets leren* niet vanzelf gaat maar worstelen inhoudt.

Een leerboog is de periode van wroeten waarbij je evolueert van 'ik kan het niet' naar 'ik kan het'.

Het breukbegrip verwerven	
Inhoud	Een breuk nemen van een continu geheel/een eenheid. $\frac{3}{4}$ van een rechthoek, een cirkel, een taart ... Breuken nemen van aantallen komt nog niet aan bod.
Ik snap het	Het geheel verdeel ik in gelijke delen. De noemer geeft aan in hoeveel delen ik verdeel. De teller geeft aan hoeveel delen ik neem. Alle delen samen vormen het geheel.
Ik snap het goed	Ik begrijp het verschil tussen stambreuken en echte breuken, later onechte breuken.
Ik oefen	Ik oefen verschillende soorten voorbeelden. De vorm van het geheel, de waarde van de teller/de noemer, de manier van verdelen ... worden afgewisseld. Ook foute voorbeelden (bv. een niet gelijke verdeling) leveren inzichten op.
Ik gebruik	Ik gebruik breuken in vraagstukken, in metend rekenen ...

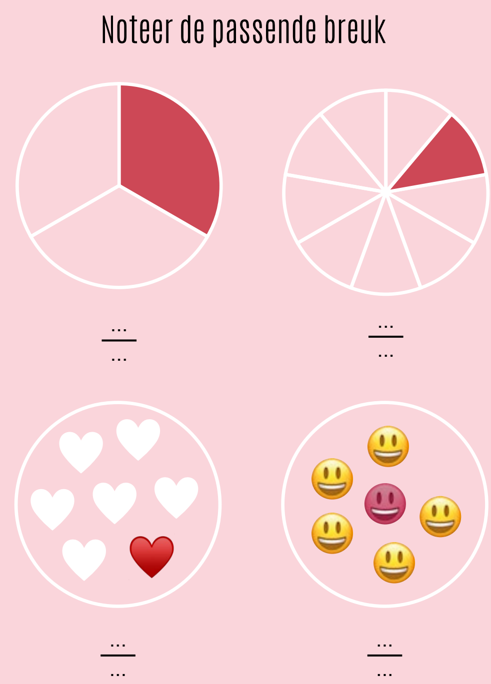
TEKST
Els Van Emelen

EEN GOEDE LEERBOOG

In de eerste fase van het onderzoek zochten we parameters die het opzetten van een goede leerboog in de hand werken of net bemoeilijken. Daarvoor namen we werkboeken van verschillende wiskundemethodes[1] door en gingen we in gesprek met de teams van de twee scholen

Heldere leerlijnen, onderscheiden concepten

Hier zie je een typische opgave voor het derde leerjaar. In deze fase ontdekken kinderen het breukconcept. Ze leren het geheel verdelen in gelijke delen, de betekenis van de teller en van de noemer.



Merk op dat de opdracht twee soorten oefeningen bevat. Bij de bovenste opgaven zoek je de passende breuk als het geheel *continu of een eenheid* is. Bij de onderste opgaven is het geheel *een aantal*. Verschillende rekenboeken bieden beide concepten van bij het begin door elkaar aan. Dat lijkt ons verwarrend.

In de eerste graad leren kinderen een hoeveelheid verdelen: 'Ik heb zes snoepjes. Ik verdeel die over drie leerlingen. Ieder krijgt er twee.'
Een eenheid (zoals een taart) verdelen over drie leerlingen, kan niet met de gewone deling. De introductie van een breuk is een antwoord op dit probleem: 'Ik heb een taart, ik verdeel die in zes gelijke delen en ik neem er twee. Ik neem twee zesde van de taart.' Het aantal delen waarin de eenheid verdeeld is (de noemer) en het aantal delen dat je neemt (de teller) zijn hierbij de parameters.

Pas wanneer je dit concept voldoende beheerst, is het tijd voor een nieuwe leerboog. Die begin je met een nieuwe probleemstelling: 'Kunnen we dit breukconcept gebruiken als het geheel een aantal is?' Je vertrekt in eerste instantie van een situatie waarbij je het aantal ook als eenheid kan opvatten: 'Neem $\frac{1}{3}$ van een reep chocolade.' Pas wanneer je je afvraagt hoeveel stukjes chocolade er in dat deel zitten, worden de aantallen relevant.

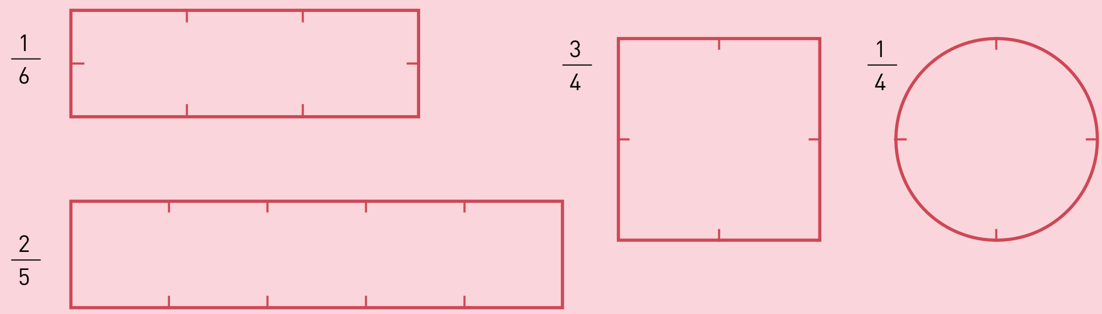
Verschillende concepten bied je best *gefaseerd in de tijd* aan. Leerlingen moeten een concept voldoende doorgronden vooraleer ze een nieuw verkennen. Daarvoor is een heldere leerlijn vanuit inhoudelijke concepten nodig[2]. Dat principe kan het leren versterken. Maar er is ook een keerzijde. Als we de leerstof opsplitsen in zeer kleine stappen, worden die betekenisloos. Bijvoorbeeld lange tijd alleen met stambreuken werken, laat een facet van het breukbegrip (de teller) onderbelicht. We geloven dat het snel - zelfs van in het begin - werken met echte breuken, kinderen beter inzicht geeft.

Fouten maken moet

De opgave op de volgende pagina is een typische opdracht voor het derde leerjaar. De opdracht bevat een aantal waardevolle elementen. De vorm van het geheel is niet altijd dezelfde. Hierdoor groeit het besef dat de *vorm* waarvan we een breuk nemen, kan verschillen. Daarnaast zijn de waardes van de teller en de noemer telkens andere getallen. Dat helpt om de betekenis van de teller en de noemer te begrijpen.

1 *Wiskanjers, Rekensprong Plus, Wiskidz, Zo gezegd Zo gerekend, zoWISo*
2 *Voor dit project ontwikkelden we een volledige leerlijn voor rationale getallen. Interesse? Contacteer els.vanemelen@ucll.be*

Verdeel het geheel in gelijke delen en kleur het gevraagde



Toch is het leereffect bij deze opgave klein. Er kan weinig mislopen, zelfs als je nog niet veel van breuken begrijpt. Als je de streepjes verbindt, heb je automatisch de noemer goed én is het geheel netjes in gelijke delen verdeeld. Zonder de streepjes is de kans op fouten groter. Als je als leraar zegt: 'Oei, het is bij breuken wél belangrijk dat je verdeelt in *gelijke* delen', trekt je hierop de aandacht.

Het *maken van fouten*, *het fout laten lopen*, zorgt voor frictie in het leerproces. Het maakt helder wat nodig is voor een juiste oplossing en laat ontdekken waarop je moet letten. In plaats van fouten te vermijden, is het beter om die doelbewust op te zetten. Het gesprek hierover is een waardevol hulpmiddel dat de essentiële elementen van de inzichten toont.

Bereken de hoogteverschillen

....

hoogteverschil	...... m	...... m	...... m
afgelegde weg	...... m	1 500 m	30 000 m

....

Laat leerlingen denken

De linkse opgave past in het zesde leerjaar en is een oefening op stijgingspercentages.

Het valt op hoe weinig woorden in de opgave staan en hoe sterk de oplossing is voorgestructureerd. Je zou kunnen zeggen dat de tabel de schematische vertaling is van het vraagstuk:

> *Op een zonnige dag rijden we door de bergen. We starten een lange beklimming. Langs de kant van de weg staat dit driehoekige verkeersbord. Hoeveel zullen we geklommen zijn nadat we 1500 m afgelegd hebben? En na 30.000 m?*

Meer context gebruiken, geeft de situatie meer *betekenis*. Enkel tekeningen en tabellen aanbieden, verschraalt de opdracht tot het uitvoeren van berekeningen.

Het vraagstuk oplossen, vraagt veel denkwerk:

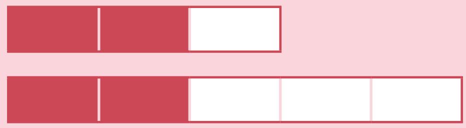
1. Welke begrippen spelen mee bij stijgingspercentages? (hoogteverschil en afgelegde weg)
2. Wat betekent een stijgingspercentage van 20%? (100 m afleggen is 20 m stijgen)

3. Zijn dit recht evenredige grootheden? (Als de weglengte verdubbelt, verdubbelt ook de stijging. Een verhoudingstabel kan helpen.)
4. We hebben geen 100 m afgelegd maar 1500 m. Hoe berekenen we het hoogteverschil? (afgelegde weg x 15, dus hoogte x 15)

De voorstructurering zorgt ervoor dat leerlingen over verschillende van deze denkstappen niet moeten nadenken. Ze hoeven zich niet af te vragen welke begrippen meespelen, of ze recht evenredig zijn, wat dat betekent, of een tabel kan helpen … Vaak kiezen we met de beste bedoelingen voor werkboeken met voorstructurering: om geen tijd te verliezen met het tekenen van een tabel, om ervoor te zorgen dat meer leerlingen de opgave juist oplossen, om fouten te vermijden … Zonder dat we er stil bij staan, nemen we echter een groot deel van *het denken* of *het worstelen* weg. En net dat is nodig om te leren.
Als je door de werkboeken bladert, valt op hoeveel al klaar staat en hoe weinig ruimte de leerlingen krijgen om zelf te denken. Misschien is dit wel een belangrijke oorzaak waarom het zoveel moeite kost om wiskunde te leren.

Meer woorden, scherpere beelden

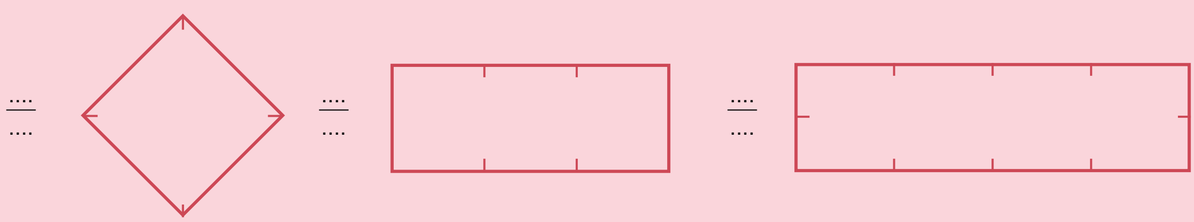
Tot het vierde leerjaar werken leerlingen steeds met benoemde breuken. Ze leren dat de grootte van het deel samenhangt met het geheel. Je kan hen boeiende facetten laten ontdekken. Zo zie je op de figuur dat $\frac{2}{3}$ van de eerste rechthoek evenveel is als $\frac{2}{5}$ van de tweede rechthoek.



Toch schrijven we nooit $\frac{2}{5} = \frac{2}{3}$. Dit soort notaties hoort thuis in het concept 'breuk als rationaal getal' waar we werken met onbenoemde breuken. Het zijn dan getallen tussen de andere getallen. Zoals we twee altijd als het dubbel van één opvatten, vergelijk je breuken vanaf nu ook met één. De afspraak dat je onbenoemde breuken van *hetzelfde* geheel neemt, verwoorden we zelden of nooit. Ervaren breukengebruikers vinden het vanzelfsprekend en laten voor de eenvoud dat stukje zin weg. Dat heet onvolledige verwoording. Stel jezelf maar eens de vraag wanneer je nog zei: 'Is $\frac{1}{3}$ groter of kleiner dan $\frac{1}{2}$ *wanneer we de breuk van hetzelfde geheel nemen*?'

Een leerling die het niet snapt, heeft deze woorden nodig om het goed te begrijpen. Stel je voor dat je in die situatie bent en de onderstaande opgave aangeboden krijgt en je vastloopt op de opgave $\frac{1}{4}$ …… $\frac{1}{3}$.

Verdeel het geheel in gelijke delen en kleur telkens 1 deel. Noteer de breuk.



Vul in: < of >

$\frac{1}{3}$ …. $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ …. $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ …. $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ …. $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ …. $\frac{1}{3}$

Je leerde dat een tekening in moeilijke situaties helpt. Van de twee rechthoeken uit de opgave kan je gemakkelijk een vierde en een derde nemen. Op basis van de tekeningen zou je kunnen besluiten dat beide breuken even groot zijn. Als leraar zijn we vaak slordig en gebruiken we rechthoeken, getallenassen, cirkels … door elkaar zonder dat we uitleggen hoe de tekening het inzicht ondersteunt.

BLOK 3

7. **Breuken, kommagetallen en percenten (1)**
8. : tot HD (1)
9. X tot HD (2)
10. Oppervlakte en omtrek van parallellogram, driehoek en ruit
11. Oriëntatie
12. Logische operatoren en/of/niet

BLOK 4

1. Deelbaar door 3 en 9
2. **Percent (begripsinvulling)**
3. : tot HD (2)
4. Schaal
5. Vlakke figuren classificeren
6. Negatieve getallen
7. Tabellen, grafieken en diagrammen
8. X en : tot d
9. Een kommagetal als quotiënt
10. De 4 bewerkingen tot d (herhaling)
11. Omstructureren

BLOK 5

1. Herstructureren en rekentaal
2. Delen met rest
3. Problemen oplossen op verschillende manieren
4. Omtrek en oppervlakte veelhoek
5. **Breuk als verhouding**
6. De cirkel
7. **Breuken, kommagetallen en percenten (2)**

Niet spreiden maar concentreren

Het verband tussen breuken, kommagetallen en percenten is een onderwerp van het vierde leerjaar. We zochten in werkboeken naar lessen hierover.
Hiernaast zie je een overzicht van een concrete lessenreeks. De lessen zijn gegroepeerd in blokken. Er zijn een vijftal lessen per week

Les 7 in blok 3 gaat over breuken, kommagetallen en percenten. Stel dat je een leerling bent die de leerinhoud *bijna* begrepen heeft (ik snap het nog niet goed). Als je scherp kijkt, komt de leerstof pas 23 lessen later (blok 5, les 7) opnieuw aan bod. Ondertussen is er rond erg diverse onderwerpen gewerkt. De kans is groot dat de leerling tegen dan veel vergeten (alles?) is van wat hij in de eerste les bijna begrepen had.
Voor het opzetten van een goede leerboog is het belangrijk dat je binnen een beperkte tijdspanne (een of twee weken) minstens drie keer met dezelfde leerstof werkt om die te kunnen verwerven en vast te zetten. Dat betekent dat je de leerstof niet spreidt maar concentreert. Goede leraren vangen dit zelf op. Met de huidige werkboeken is dat erg lastig. De leerstof is in schijnbaar willekeurige delen gehakt. Dit maakt het moeilijk om een degelijke leerboog op te zetten.

VRIJHEID DURVEN NEMEN

Na de analyse van de werkboeken, klasbezoeken en gesprekken, kriebelen onze vingers. We willen zelf initiatief nemen! Juf Carine en juf Tine maken ruimte in hun planning om samen op onderzoek te gaan. We ontwikkelen materiaal, bereiden lessen voor en worden voor één week juf in het zesde leerjaar[3].

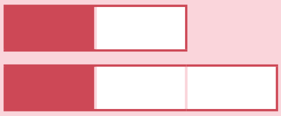
Een helder concept kiezen

We leggen de lessen die nog op het programma staan naast onze leerlijn van rationale getallen. We zoeken een onderwerp waar de leerlingen nog maar weinig over geleerd hebben en dat we kunnen samenballen tot een groter geheel. Zo zorgen we voor een geconcentreerde leerboog van 3 keer 2 uur. Na wat zoekwerk vinden we voldoende materiaal dat past in het concept ‘Breuk als verhouding, absoluut en relatief vergelijken’.

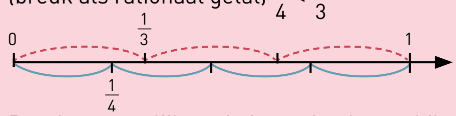
3 In dit artikel illustreren we onze ideeën aan de hand van het materiaal dat we bij juf Carine uitproberen.

Dit is de derde stap in het vergelijken van breuken. Even situeren:

1. Een breuk hangt samen met het geheel (breukbegrip verwerven):
   Scherp gesteld kan $\frac{1}{2}$ van rechthoek 1 even groot als $\frac{1}{3}$ van rechthoek 2 zijn.



2. Breuken vergelijken als het geheel gelijk is (breuk als rationaal getal) $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$



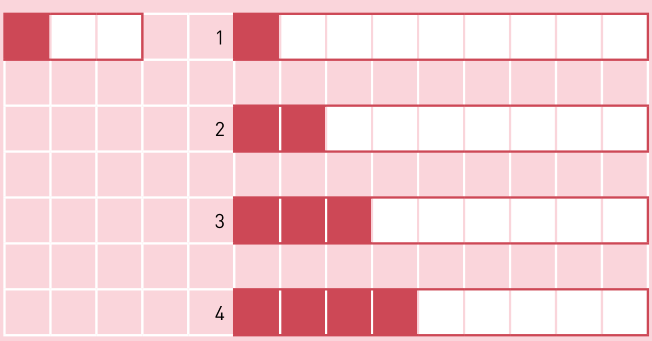
3. Breuken vergelijken als het geheel verschillend is (breuk als verhouding)
   - Een vaste verhouding tussen verschillende gehelen. Bv. twee kettingen met een verschillend aantal kralen. Bij beide kettingen zijn $\frac{1}{3}$ van de kralen blauw.
   - Relatief vergelijken. Bv. in school A komen relatief meer leerlingen met de fiets dan in school B.

De problemen op tafel

We starten de lessenreeks met een klassikale instructie van een half uur. Bij zo'n instructie heb je het voordeel dat leerlingen die de problemen snel doorzien, de groep vooruit kunnen helpen met hun inzichten. De ideale setting om leerlingen uit te dagen. Met het volgende probleem willen we het denken bij de leerlingen leggen en de moeilijkheden op tafel krijgen.

'Welke rechthoek past bij het rechthoekje aan de linkerkant?' (zie onderstaande figuur)

We hopen dat de kinderen verschillende antwoorden kiezen zodat we die kunnen bespreken.



Tot onze verrassing kiezen ze collectief voor optie 3. Ook bij ons loopt het soms fout. Blijkbaar leidt intuïtie spontaan naar het kiezen van dezelfde verhoudingen. We laten dat niet aan ons hart komen en stellen zelf alternatief 1 voor. Op die manier krijgt het verschil tussen absoluut en relatief vergelijken toch de nodige aandacht.

Het witte blad: soberheid als troef

We kiezen voor opgaven zonder voorstructurering en bieden sober geformuleerde vraagstukken aan.

1. In het zesde leerjaar van top@punt zitten 22 leerlingen. Dit is een milieubewuste klas. Ze gaan nog niet naar de klimaatbetogingen maar er komen wel al 8 leerlingen met de fiets, de bus of te voet naar school.
   In het zesde leerjaar van de Twinkelaar zitten 33 leerlingen. Zij doen het nog beter. In deze klas komen wel 10 leerlingen naar school zonder de auto te gebruiken.
   Wat denk je over deze stelling?
2. In het zesde leerjaar van top@punt zitten 22 leerlingen. Dit is een milieubewuste klas. Ze gaan nog niet naar de klimaatbetogingen maar er komen wel al 8 leerlingen met de fiets, de bus of te voet naar school.
   In het zesde leerjaar van de Twinkelaar zitten 33 leerlingen. Deze leerlingen zijn ambitieus en willen het graag relatief beter doen dan top@punt. Hoeveel leerlingen moeten er dan zonder de auto te gebruiken naar school komen?

We noemen dit *de strategie van het witte blad*. We bouwen dit op met *voordoen* tijdens de klassikale instructie, daarna *samen* per twee en *alleen doen* in de verwerkingsfase.

Hierbij is het gebruik van een algemene heuristiek (gegeven, gevraagd, tekening, oplossing, controle) een nodige vaardigheid. Samen werken we de twee voorbeeldopgaven uit. Die blijven de hele les op het bord zodat we hier telkens naar kunnen verwijzen.

Van een schema naar een breuk

We bieden twee manieren aan om de vraagstukken op te lossen: met een ondersteunend schema of abstract met breuken. Beide methodes brengen we aan in de klassikale instructie, we laten het verband tussen beide zien. Kinderen krijgen zo de kans om van een schema door te groeien naar een abstracte werkwijze:

Vergelijken met een verhoudingstabel

top@punt	geen auto	8 ll.	24 ll.
	totaal	22 ll.	66 ll.
Twinkelaar	geen auto	10 ll.	20 ll.
	totaal	33 ll.	66 ll.

Vergelijken met breuken

top@punt $\frac{8}{22} = \frac{24}{66} > \frac{20}{66} = \frac{10}{33}$ Twinkelaar

Intensief en gericht oefenen

De rest van de tijd (5,5 uur) is oefentijd waarbij wij de leerlingen individueel of in groepjes begeleiden.

Bij het ontwikkelen van het materiaal vertrekken we van een aantal ideeën.

We zoeken véél opgaven. Alle opgaven gaan over breuk als verhouding zodat de hele klas met dezelfde leerstof bezig is en de gemeenschappelijke instructie rendeert. Het is niet de bedoeling dat de leerlingen al deze opdrachten oplossen. Dit geeft de leraar een keuze: wie maakt welke opdrachten en hoeveel tijd wil ik in dit onderwerp investeren. Na overleg met juf Carine delen we de klas op in drie groepen. Elke groep krijgt een andere selectie van opgaven om op te lossen. De selectie sluit aan bij hun uitdagingsniveau.
We geven geen voorstructurering maar zorgen voor sobere opgaven zoals in de instructie. Af en toe is een tekening nodig om een opgave te verduidelijken. De leerlingen krijgen ruitjesbladen om de opgaven op te lossen.

We ordenen de opgaven in drie reeksen. De eerste reeks oefent het basisinzicht met gelijkaardige opgaven aan de instructie. De tweede reeks bevat opgaven die verdiepend zijn met nieuwe contexten, omgekeerd redeneren en andere formuleringen. De derde reeks bevat behoorlijk moeilijke opgaven met minder evidente wiskundige inhouden.

Reeks 1

1. Fanny versiert een kroon. Voor elke stersticker plakt ze drie 🙂-stickers op de kroon. Ze gebruikt in totaal 8 sterstickers. Hoeveel 🙂-stickers heeft ze nodig?
2. De nieuwe STAR WARS film loopt. In zaal Kine zijn 180 van de 240 plaatsen bezet, in zaal Star zijn er dat 200 van de 250. Welke zaal is relatief het best bezet?

Reeks 2

1. Michèle maakt een kralenketting. Het aantal roze parels dat ze gebruikt is $\frac{1}{4}$ van het aantal paarse parels. De hele ketting bestaat uit 60 parels. Hoeveel roze en hoeveel paarse parels gebruikt ze?
2. In De Zon zijn 360 leerlingen ingeschreven. De verhouding tussen het aantal jongens en het aantal meisjes is 4 op 5. Hoeveel meisjes zijn er meer dan jongens?

Reeks 3

1. De zwemclub kende een toename van zwemmers: eerst waren er 50 leden. Nu zijn er 12 bijgekomen. De voorzitter van de voetbalclub is ook blij want zijn ledenaantal nam met 1/5 toe en kent nu 120 leden.
   a) Welke club kende absoluut de grootste stijging?
   b) Van welke club was de procentuele toename het grootst?
2. Margot zegt: "In absolute cijfers gaan er meer leerlingen van 6A basketten dan van 6B, maar relatief gezien zijn het er minder. In 6A zitten 24 leerlingen en in 6B zitten 18, waarvan er 6 basketten." Hoeveel leerlingen spelen basket in 6A?

POSITIEVE SIGNALEN

De lessen waren intensief en rijk. Kleine signalen gaven ons een positief beeld. Alle leerlingen worstelden. Ook leerlingen die snel wiskundige inhouden verwerven, ervoeren hoe het is om iets niet te kunnen.

In zes uur merkten we een grote vooruitgang om met 'een wit blad' te werken. Van copy/paste zag je leerlingen groeien naar het noteren van wat nodig was: 'juf, hier maak ik geen tekening want die staat al in het boek' of 'ik schrijf mijn gegevens op de figuur, dat is duidelijker'.

Leerlingen die moeite hebben met wiskunde, hadden het meeste baat bij het werken met een wit blad. Fier losten zij een opgave van reeks 3 op.

Leerlingen die wiskunde gemakkelijker verwerven, toonden het meeste weerstand voor het werken met een heuristiek. Zij beperkten zich tot snel noteren van enkele berekeningen. Pas op het moment dat zij moeite kregen met de opgaven (reeks 3), konden we ze het voordeel laten ervaren.

Door op korte termijn herhaaldelijk en intensief met de leerstof bezig te zijn, hadden de leerlingen het gevoel dat ze de leerstof 'door' kregen. Van sommige zinnen werd je als leraar gelukkig: 'juf, ik doe dat met die tabel want dat snap ik beter', 'ik doe dat even snel met die breuken', 'ik snap nu wat ik fout doe' of 'het boek zegt het al voor hé'.

Ook wij leerden bij: eerst zagen we kinderen kribbelen op lege plekjes in hun kladschrift en het overzicht verliezen. Daarom zorgden wij voor lege witte bladen en later voor ruitjespapier. Juf Carine besliste om volgend jaar met een wiskundeschrift te werken. Ze proefde van de vrijheid die dat haar gaf.

ZELF STAPPEN ZETTEN

Materiaal ontwikkelen dat het opzetten van leerbogen beter ondersteunt, is intensief en niet gemakkelijk. Dat ondervonden we zelf. Toch kan je met een beperkte investering al enkele initiatieven nemen:

1. Verwijder zoveel mogelijk voorstructurering. Leg op die manier het denken bij de leerlingen.
2. Laat het fout lopen! Bespreek met leerlingen waarom het fout is en wat er nodig is voor een juist antwoord.
3. Maak een jaarplan waarin je lessen over eenzelfde leerinhoud binnen een korte tijdsspanne groepeert per onderwerp. Werk twee à drie keer per jaar intensief rond dezelfde leerinhoud. (Sommige leerinhouden, zoals de tafels, oefen je uiteraard doorheen het hele jaar vaak en kort.)
4. Per lesonderwerp voorzie je een instructie voor de hele groep, gevolgd door individueel inoefenen met opdrachten op verschillende niveaus.
5. Zoek waar jouw leerinhouden passen binnen een leerlijn vanuit concepten. Overleg met collega's op welke onderwerpen jij belangrijke focussen legt.

We wensen je even boeiende ervaringen als de onze!

Voetnoot

Dit artikel is gebaseerd op 'Impulsonderzoek: de kracht om een goede boog te spannen' van Michèle Dexters, Liesbeth Lefèvre, Veerle Martens, Els Van Emelen, wiskundedocenten UCLL-lerarenopleiding basisonderwijs Limburg, verbonden aan de expertisecentrum 'Art of Teaching' UCLL.